Andrei N. Kolmogorov (1903-1987), bouwer van de kansaxioma's

van den Brandhof, A.; Broer, Hendrik; Hart, K.P.

Published in:
Pythagoras

Publication date:
2010

De Rus Andrei Nikolaevich Kolmogorov is beroemd vanwege het feit dat hij de kansrekening een degelijk fundament gaf, maar ook in andere gebieden van de wiskunde heeft hij baanbrekend werk verricht; je zou hem ook een mathematisch fysicus *avant la lettre* kunnen noemen. Hij was een echte outdoorman: de beste wiskundige ideeën kreeg hij tijdens het wandelen, zwemmen of skiën – activiteiten die hij zijn hele leven veel heeft gedaan.
■ door Alex van den Brandhof, Henk Broer en Klaas Pieter Hart

ANDREI N. KOLMOGOROV (1903-1987): BOUWER VAN DE KANSAXIOMA'S

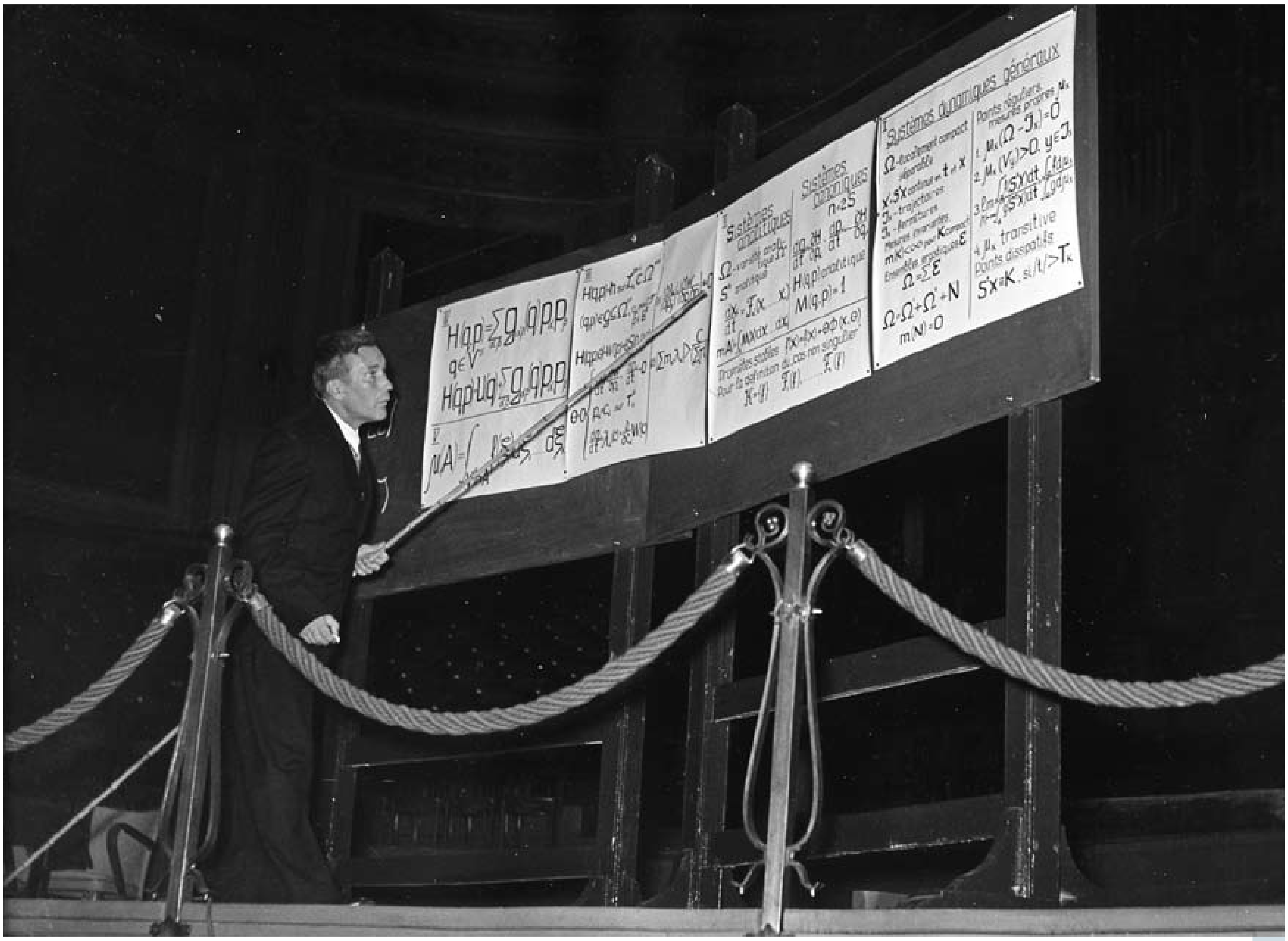
Al in de zeventiende werd kansrekening gebruikt in rokerige salons waar gokspelen erg populair waren. Een gedegen theorie van de kansrekening bestond echter nog niet. Veel gokkers kwamen bedrogen uit, toen ze ontdekten dat spelletjes anders verliepen dan ze op grond van hun – foutieve – theorie mochten verwachten. De Fransman Antoine Gombauld was zo'n gokker. Hij wendde zich tot de wiskundige Blaise Pascal (1623-1662) toen hij ontdekte dat het voordelig was om bij het gooien met vier dobbelstenen te wedden op ten minste één zes, maar dat theoretisch niet kon verklaren.

Een briefwisseling uit 1654 tussen Pascal en Pierre de Fermat (1601-1665) over dit dobbelspel wordt doorgaans gezien als de 'geboorte' van de kansrekening. Hoe zij Gombaulds probleem oplosten, kun je lezen in het kader op pagina 19. Na deze briefwisseling verschenen diverse wetenschappelijke verhandelingen van grote geleerden, waaronder Christiaan Huygens (1629-1695), Jakob Bernoulli (1654-1705), Abraham de Moivre (1667-1754), Pierre Simon Laplace (1749-1827) en Carl Friedrich Gauss (1777-1855).

KANSAXIOMA'S Onder meer de Fransman Henri Lebesgue (1875-1941) maakte aan het begin van de twintigste eeuw grote vorderingen op het gebied van de kansrekening, maar wat nog altijd ontbrak, was een *axiomatische opbouw* van dit vakgebied. Wat Euclides al 300 jaar voor Christus deed voor de meetkunde, deed Andrei Nikolaevich Kolmogorov voor de kansrekening. Axioma's zijn niet-bewezen, maar als grondslag aanvaarde stellingen, waarmee andere stellingen kunnen worden bewezen. Zo zegt een van de meetkunde-axioma's van Euclides dat twee punten altijd kunnen worden verbonden door een rechte lijn.

In 1929 verscheen Kolmogorovs artikel 'General Theory of Measure and Probability Theory'. De axiomatische beschrijving van de kansrekening die hij hierin geeft, vormt de basis voor de 'moderne kansrekening'. Daarvóór had hij al verschillende artikelen gepubliceerd over kansrekening, onder andere over de *sterke wet van grote aantallen*, zie het kader op pagina 20. Zijn artikel uit 1929 ging deel uitmaken van zijn inmiddels klassieke boek *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung* uit 1933. In het voorwoord schrijft Kolmogorov dat zijn doel is om een axiomatische opbouw van de kansrekening te geven en hij merkt daarbij op dat dit zonder de maat- en integratietheorie van Lebesgue onmogelijk zou zijn geweest. Deze sympathieke houding

In 1942 trouwde Kolmogorov met Anna Dmitrievna Egorova. Bron: Steklov Mathematical Institute, Moskou



In 1954 werd het Internationaal Wiskundig Congres in Nederland gehouden. Kolmogorov gaf de slotvoordracht in de Grote Zaal van het Concertgebouw, waar hij de zogeheten *KAM-theorie* (KAM staat voor Kolmogorov, Arnol'd en Moser) uiteenzette. Bron: Centrum Wiskunde & Informatica, Amsterdam.

tegenover collega-wiskundigen behield hij de rest van zijn leven.

De kansaxioma's van Kolmogorov zijn:

- de verzameling Ω van alle mogelijke uitkomsten heeft kans 1, ofwel: $\mathbf{P}(\Omega) = 1$;
- voor elke deelverzameling A van Ω is de kans op A gelijk aan een reëel getal tussen 0 en 1: $0 \leq \mathbf{P}(A) \leq 1$;
- als $A_1, A_2, A_3, \ldots$ disjuncte deelverzamelingen zijn van Ω, dan is de kans op de vereniging van deze gebeurtenissen gelijk aan de som van de afzonderlijke kansen: $\mathbf{P}(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots) = \mathbf{P}(A_1) + \mathbf{P}(A_2) + \mathbf{P}(A_3) + \cdots$

Uit deze 'grondregels' zijn andere regels af te leiden, zoals de *complementregel* ($\mathbf{P}(A) = 1 - \mathbf{P}(\text{niet-}A)$) en de *uitgebreide somregel* ($\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cap B)$).

Overal waar kansrekening wordt toegepast – zoals in de econometrie, theoretische natuurkunde, genetica en demografie – is de invloed van Kolmo-

EEN DOBBELSPEL UIT DE ZEVENTIENDE EEUW In 1654 hadden de Franse wiskundigen Fermat en Pascal een briefwisseling over kansproblemen die hen door gokkers werden voorgelegd. Die brieven zijn bewaard gebleven. Een van de problemen die in die brieven aan de orde worden gesteld, is de vraag welke van de volgende twee gebeurtenissen waarschijnlijker is:

A. ten minste eenmaal '6 ogen' in 4 worpen met een dobbelsteen;
B. ten minste eenmaal 'dubbel 6' in $6 \times 4 = 24$ worpen met twee dobbelstenen.

De verhouding 4 : 6 (4 worpen, 6 mogelijke uitkomsten) is gelijk aan de verhouding 24 : 36 (24 worpen, 36 mogelijke uitkomsten), dus beide situaties hebben kans $\frac{2}{3}$, redeneerde Gombauld. Na vele spelletjes merkte hij echter dat deze theorie niet strookte met de ervaring: hij constateerde dat wedden op A gunstig is voor de speler en B niet. Fermat en Pascal losten het probleem op:

$$\mathbf{P}(A) = 1 - \frac{5^4}{6^4} \approx 0{,}52 \text{ en } \mathbf{P}(B) = 1 - \frac{35^{24}}{36^{24}} \approx 0{,}49;$$

dus A is waarschijnlijker.

gorov merkbaar. Na zijn boek uit 1933 verschenen nog diverse andere belangrijke bijdragen aan de kansrekening. Een klassieker werd het boek *The limit distributions for the sums of independent random variables* (1949) dat hij samen met Boris Gnedenko (1912-1995) schreef.

Het is niet verwonderlijk dat Kolmogorov aan de universiteit van Moskou de leerstoel kansrekening bekleedde. Toch was het niet alléén de kansrekening – zuiver en toegepast – waarmee hij zich bezighield. Hij heeft meer dan 300 publicaties op zijn naam staan, met bijdragen in onder meer de mechanica, turbulentietheorie, topologie, verzamelingenleer, projectieve meetkunde, logica, maat- en integratietheorie en ergodentheorie. Na de Tweede Wereldoorlog kwamen daar de informatietheorie en complexiteitstheorie bij, zie het kader over *Kolmogorovcomplexiteit* op pagina 22.

Pavel S. Aleksandrov en Andrei N. Kolmogorov.
Bron: Steklov Mathematical Institute, Moskou

JEUGD Andrei Nikolaevich Kolmogorov werd geboren op 25 april 1903 in Tambov, een stad in Rusland waar zijn moeder Maria Yakovlevna Kolmo-

WETTEN VAN GROTE AANTALLEN Een van de meest basale intuïties in de kansrekening is het idee dat wanneer je erg vaak met een munt gooit, de fractie van het aantal keren 'kop' ongeveer $\frac{1}{2}$ is. Van deze zogeheten *empirische wet van grote aantallen* had Gombauld, zie het kader op pagina 19, al enig besef, getuige het feit dat hij theorie koppelde aan zijn ervaring. Er bestaan ook diverse *wiskundige wetten van grote aantallen*. De Zwitser Jakob Bernoulli (1654-1705) bewees een speciaal geval van wat wij tegenwoordig de *zwakke wet van grote aantallen* noemen. Uitgangspunt is een vaas met ballen, waarvan een fractie p de kleur rood heeft. In n trekkingen met teruglegging worden m rode ballen getrokken. Bernoulli's stelling zegt nu dat de geobserveerde fractie rode ballen (modern gezegd) *in kans convergeert* naar de werkelijke fractie rode ballen als het aantal trekkingen n naar oneindig gaat. Dus voor elke $\varepsilon > 0$:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(\left|p - \tfrac{m}{n}\right| < \varepsilon\right) = 1.$$

De *zwakke wet van grote aantallen* zoals die later door diverse wiskundigen werd bewezen luidt als volgt. Als $X_1, X_2, X_3, \ldots$ onafhankelijke stochasten zijn, elk met verwachting μ, dan geldt voor elke $\varepsilon > 0$:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(\left|\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} - \mu\right| < \varepsilon\right) = 1.$$

Kolmogorov kwam met een doorbraak toen hij zijn *sterke wet van grote aantallen* bewees. Deze luidt als volgt. Als $X_1, X_2, X_3, \ldots$ onafhankelijke, gelijkverdeelde stochasten zijn met verwachting μ, dan geldt:

$$\mathbf{P}\left(\lim_{n\to\infty} \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} = \mu\right) = 1.$$

Het verschil tussen de beide wetten zit natuurlijk in wat ze zeggen, maar ook in hun aannamen.

Wat het eerste betreft: de zwakke wet zegt dat als n groot genoeg is, de kans dat bij die specifieke waarde van n het gemiddelde meer dan ε afwijkt van de verwachting, klein is. Dit betekent niet dat het gemiddelde ook daadwerkelijk convergeert naar de verwachting. De sterke wet garandeert dat er een moment N komt zó dat vanaf die N het gemiddelde zeker minder dan ε van μ afwijkt; er is alleen geen zekerheid over welk moment dat is.

Wat het tweede betreft: hierboven is voor de zwakke wet geëist dat alle *verwachtingen* gelijk zijn en voor de sterke wet dat alle *kansverdelingen* gelijk zijn. Het volgende voorbeeld laat zien dat de sterke wet niet zonder meer geldt als die eis wordt losgelaten. Neem de rij stochasten $X_1, X_2, X_3, \ldots$ waarvoor geldt dat $X_1 = 0$ en voor $i > 1$:

$$\mathbf{P}(X_i = i) = \tfrac{1}{i} \qquad \text{en} \qquad \mathbf{P}\left(X_i = \tfrac{i}{1-i}\right) = 1 - \tfrac{1}{i}.$$

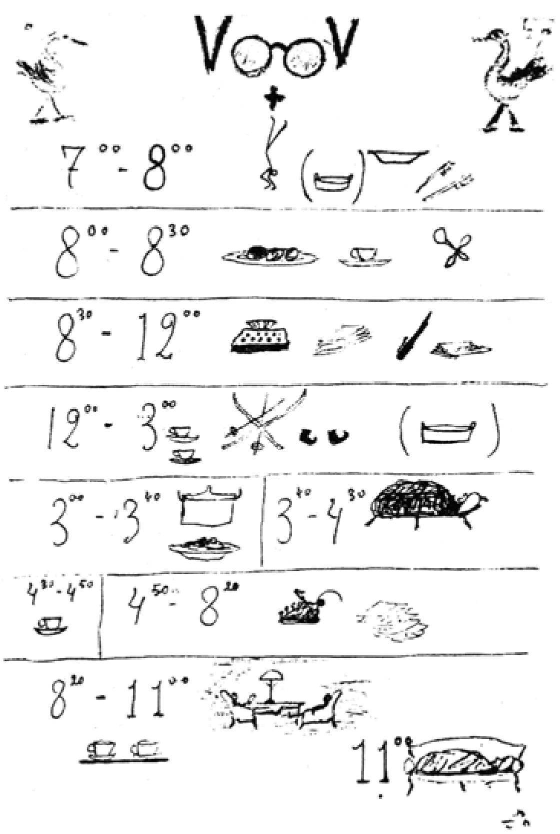
Elke X_i heeft verwachting $\mu = 0$. Aan de zwakke wet wordt voldaan, maar je kunt bewijzen dat het gemiddelde van $X_1, X_2, \ldots, X_n$ naar ∞ gaat, dus

$$\mathbf{P}\left(\lim_{n\to\infty} \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} = \mu\right) = 0.$$

De sterke wet van grote aantallen gaat dus niet op!

gorova op doorreis was na een vakantie. Maria Yakovlevna overleefde de bevalling niet. Andreis vader Nicolai Kataev – zijn ouders waren niet getrouwd – was landbouwkundig ingenieur. Hij maakte deel uit van een zogeheten *Zemstvo* (regionaal zelfbestuur) en moest daarvoor naar de stad Jaroslavl. Contact met zijn zoon had hij niet en het is daarom niet zo gek dat Andrei de achternaam van zijn grootvader Yakov Stephanovich Kolmogorov kreeg, in plaats van die van zijn eigen vader.

Kolmogorov kwam terecht bij Maria's zus Vera Yakovlevna Kolmogorova. Zo groeide hij op in de stad Tunoshna. Na zijn middelbare-schooltijd, in 1920, nam Kolmogorov een baantje als treinconducteur en ging hij wiskunde studeren aan de universiteit van Moskou. Wiskunde was echter nog niet zijn grote passie: hij hield zich vooral met geschiedenis bezig. Toch kwam zijn wiskundige talent al vroeg aan het licht: hij had op negentienjarige leeftijd als eerste een voorbeeld gevonden van een integreerbare functie, waarvan de bijbehorende Fourierreeks 'bijna overal' divergent is (een Fourierreeks is een som waarvan de termen goniometrische functies zijn, en 'bijna overal' is een begrip uit de *maattheorie* waarmee grofweg bedoeld wordt: 'overal op een verwaarloosbaar deel na').



Een schets van Kolmogorov, met zijn dagelijkse routine in zijn dacha in Komarovka. Bron: Steklov Mathematical Institute, Moskou

Volgens eigen zeggen had hij dit ontdekt, terwijl hij kaartjes zat te knippen in de trein. Met dit resultaat kreeg hij in één klap een internationale reputatie, die al helemaal niet meer stuk kon toen hij twee jaar later het resultaat kon verscherpen van 'bijna overal' naar 'overal'.

PROBLEMEN VAN HILBERT In 1900 hield David Hilbert zijn befaamde lezing op het Internationaal Wiskundig Congres in Parijs, waar hij het publiek 23 problemen voorlegde, waarmee wiskundigen zich volgens hem in de komende eeuw bezig moesten houden. In het Zesde Probleem vroeg Hilbert naar een axiomatische opbouw van de statistische mechanica; hij veronderstelde dat de mechanica nauw verbonden moest zijn met de theorie van de kansrekening. Met de kansaxioma's had Kolmogorov het kanstheoretische deel van Hilberts Zesde Probleem opgelost.

Vanaf 1955 hield Kolmogorov zich ook met een ander probleem van Hilberts lijst bezig: het Dertiende Probleem. Dit probleem gaat over de oplossing van de vergelijking $x^7 + ax^3 + bx^2 + cx + 1 = 0$; als we a, b en c laten variëren, wordt x een functie van die drie variabelen. Hilbert vroeg of die functie uit eindig veel functies van twee variabelen kan worden samengesteld.

Zo is $f(a, b, c) = abc$ een functie van drie variabelen die opgebouwd kan worden uit de e-macht, de logaritme en de optelling (dus dat zijn twee functies van één variabele en één van twee variabelen):

$$abc = \mathrm{e}^{(\ln a + \ln b) + \ln c}.$$

Wat Kolmogorov en zijn student Vladimir Arnol'd lieten zien, is dat dit altijd mogelijk is: je kunt een continue functie van drie variabelen met behulp van 28 functies van één variabele en de optelling uitdrukken:

$$f(x,y,z) = \sum_{i=1}^{7} g_i\left(\varphi_{i,1}(x) + \varphi_{i,2}(y) + \varphi_{i,3}(z)\right).$$

Hier hangen alleen de functies g_i van f af, de functies $\varphi_{i,j}$ zijn altijd dezelfde.

KOLMOGOROV IN HET CONCERTGEBOUW

Kolmogorovs onderzoeksterrein bleef niet beperkt tot de zuivere wiskunde. Dat bleek onder meer in 1954, toen hij de slotrede verzorgde van het Internationaal Wiskundig Congres, dat dat jaar in Amsterdam werd gehouden. Die lezing, getiteld 'General theory of dynamical systems and classical mechanics', vond plaats in het Concertgebouw.

Bij de beweging van een planeet rond de zon

KOLMOGOROV-COMPLEXITEIT Sommige rijtjes symbolen zijn makkelijker te onthouden en door te geven dan andere. Bijvoorbeeld het rijtje

0101010101010101010101010101010101

kun je doorgeven als: 16 keer '01'. Het rijtje

01328753937610984274563024695762

is een stuk lastiger, je kunt niet veel meer doen dan het hele rijtje cijfer voor cijfer op te lezen.

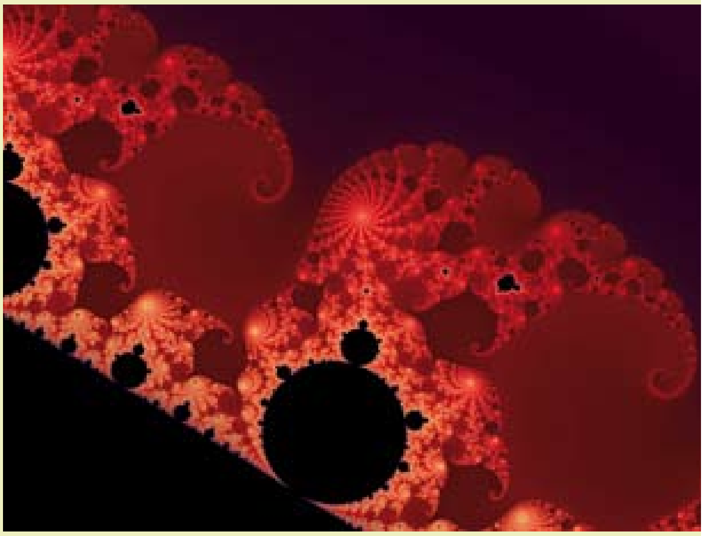
De *Kolmogorov-complexiteit* van een rijtje is gedefinieerd als de lengte van de kortste beschrijving ervan. Je kiest een (programmeer)taal, bijvoorbeeld C^{++}, en je telt het aantal tekens dat nodig is om de rij te produceren:

```
for ( int n=1;  n<=16; n++ )
{cout <<"01"}
```

Dit is langer dan de gegeven rij, maar voor een rij die we in woorden met 10.000 keer '01' kunnen beschrijven, hoeven we het programma maar drie karakters langer te maken, en dat maakt het veel korter dan de rij zelf. Voor de rij zonder regelmaat kunnen we niet veel meer doen dan het in het programma op te slaan in een aantal `cout`-statements.

De rij met 10.000 keer '01' heeft een lage complexiteit, omdat het maar een kort programma nodig heeft; de willekeurige rij heeft een hoge complexiteit omdat elk programma ongeveer even lang als de rij zelf moet zijn.

Je kunt zelf testen hoe complex een rijtje cijfers is: stop het in een file en laat een programma als bzip2 of zip de file comprimeren. Vervolgens vergelijk je hoeveel kleiner de file geworden is.



Hier zie je een deel van de *Mandelbrotverzameling-fractal*. Het afzonderlijk opslaan van alle 24-bit kleurpixels in dit plaatje zou 1,62 miljoen bits kosten. Een klein computerprogramma kan deze 1,62 miljoen bits reproduceren door gebruik te maken van de definitie van de Mandelbrotverzameling. Daarom is de Kolmogorov-complexiteit van dit plaatje relatief laag.

gelden de bekende drie wetten van Kepler, waarvan de eerste zegt dat de baan van de planeet een ellips is. De tweede wet geeft aan hoe snel de planeet beweegt, namelijk zó dat de voerstraal tussen zon en planeet in gelijke tijdsintervallen sectoren met gelijke oppervlakten beschrijft. De derde wet zegt iets over hoe de omloopstijd T en de halve grote as a van de ellips zich tot elkaar verhouden: het blijkt dat T^2 evenredig is met a^3.

So far so good. Als er echter twee of meer planeten om dezelfde zon lopen, dan begint het gegooi in de glazen: de planeten trekken elkaar wederzijds namelijk ook aan en die mooie ellipsbewegingen worden zo lelijk verstoord. Toch lijkt het net alsof dat laatste niet zo is, het zonnestelsel lijkt een prettig voorspelbaar geheel waarin alles netjes (multi-) periodiek verloopt. We voorspellen zonsverduisteringen en de paasdata dan ook rustig enkele eeuwen in de toekomst. Kolmogorov heeft samen met Vladimir Arnol'd (1937) en Jürgen Moser (1928-1999) voor het eerst een stelling bewezen die, als hij toepasbaar zou zijn op het zonnestelsel, deze 'stabiliteit' tot in de eeuwen der eeuwen zou garanderen. De praktijk is echter weerbarstig en de stelling is niet toepasbaar. Sterker nog, velen geloven nu dat het zonnestelsel op een tijdschaal van 100.000.000 jaar onvoorspelbaar begint te worden. Chaos dus...

Maar ook zonder toepassing geldt het resultaat van Kolmogorov, Arnol'd en Moser als een van de belangrijkste uit de twintigste eeuw in de klassieke mechanica.

WISKUNDE ALS OUTDOOR-ACTIVITEIT Kolmogorov was niet alleen een briljant onderzoeker, maar had ook een warm hart voor kinderen en studenten. Hij richtte een school op in Moskou voor leerlingen met een speciaal talent voor wiskunde: *Boarding School 18*, of kortweg 'Kolmogorov School'. De leerlingen van deze school wonnen vaak de eerste prijzen bij de Russische en de Internationale Wiskunde Olympiade. Maar niet alleen wiskunde kreeg op deze school speciale aandacht; muziek, literatuur en architectuur stonden er ook hoog in het vaandel. Want Kolmogorov had een brede interesse: buiten wiskunde was hij een belezen man met in het bijzonder belangstelling voor de gedichten van Poesjkin.

In de zomer van 1929 huurden Kolmogorov en Pavel S. Aleksandrov (1896-1982) – die later een wereldberoemde topoloog werd – een bootje, waarmee ze een lange tocht over de Wolga aflegden. Met een eenvoudige campinguitrusting en Homerus' *Odyssee* op zak bezochten ze de meest idyllische plekjes; zwemmen, zonnebaden, lezen en wiskunde doen waren de hoofdactiviteiten tijdens deze zomer. Drie weken lang voeren ze in totaal 1300 kilometer over de Wolga, waarna de reis verder ging te voet en met het openbaar vervoer, waarbij onder meer de Kaukasus en het Sevanmeer werden aangedaan. *En passant* beklommen ze nog even de 4100 meter hoge berg Aragats. Deze vakantie was het begin van een lange en hechte vriendschap tussen Kolmogorov en Aleksandrov.

Kolmogorov hield er een actieve levensstijl op na. Hij zwom graag – het liefst in het voorjaar, wanneer de sneeuw en het ijs nog maar net gesmolten waren – en maakte wandelingen waarbij hij enkele tientallen kilometers per dag aflegde. Deze foto is gemaakt tijdens een bergwandeling in 1961. Bron: *Statistical Science*, Vol. 6, Nr. 3 (1991)

Later kochten Kolmogorov en Aleksandrov in het dorp Komarovka een zogeheten *dacha*: een typisch Russisch buitenhuis. Dat huis voldeed aan al hun behoeften: er was ruimte voor een grote bibliotheek, er waren verschillende kamers zodat collega's voor langere tijd konden worden uitgenodigd en het was prachtig gelegen. Wie met Kolmogorov samenwerkte, kreeg geen kans om enkel in de studeerkamer tot inzichten te komen: deze outdoorman gaf iedereen gewoon een paar wandelschoenen of ski's en nam je mee naar buiten. De beste ideeën kreeg je terwijl je aan het relaxen bent in de buitenlucht, vond hij. Inderdaad: veel van zijn belangrijke resultaten zijn verkregen op pittoreske locaties in de Sovjet Unie.

Met zijn studenten maakte hij dikwijls op zondag een stevige wandeling (40 kiometer was geen uitzondering) die eindigde bij zijn dacha, om daar met zijn allen te eten. Dat Kolmogorov werd gewaardeerd door zijn studenten, blijkt wel uit het feit dat meer dan zestig personen hun proefschrift onder zijn supervisie schreven.

Kolmogorov kreeg vele prijzen en eredoctoraten en veel buitenlandse Academies van Wetenschappen verkozen hem tot lid, waaronder de Koninklijke Nederlandse Academie van Wetenschappen in 1963. Kolmogorov overleed op 20 oktober 1987. ■

LITERATUUR Bij het schrijven van dit artikel is gebruik gemaakt van het boek *Kolmogorov in perspective*, History of Mathematics Vol. 20, AMS/LMS (2000), met artikelen van diverse auteurs, waaronder Kolmogorov zelf. Verder zijn de volgende artikelen geraadpleegd: 'Obituary Andrei Nikolaevich Kolmogorov (1903-1987)' door David Kendall e.a., *Bull. London Math. Soc.* 22 (1990), pp. 31-100; 'A.N. Kolmogorov and His Creative Life' door A. Melnikov, *π in the Sky - Journal of Pacific Institute for Math. Sciences* 7 (2003), pp. 23-25; 'Ken uw klassieken: Kolmogorov in het Concertgebouw' door Henk Broer, *Nederlands Tijdschrift voor Natuurkunde* 70-1 (2004), pp. 20-21. Een goede introductie over de *KAM-theorie* is te lezen in *Dynamical Systems and Chaos* van H.W. Broer en F. Takens, Epsilon Uitgaven 64 (2009).